EXERCICE N°1 : 30' 6 points

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et dérivable sur] - ½ , ½].

x	-1/2		0		1/2
f '	‖	+	2π	-	0
f	‖ -∞	↗	-2	↘	-1

1) a) Montrer que f réalise une bijection de] - ½ , ½] sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en -2 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(-1 - \frac{k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}\left(-1 - \frac{2}{n}\right) \leq u_n \leq f^{-1}\left(-1 - \frac{1}{n}\right)$.

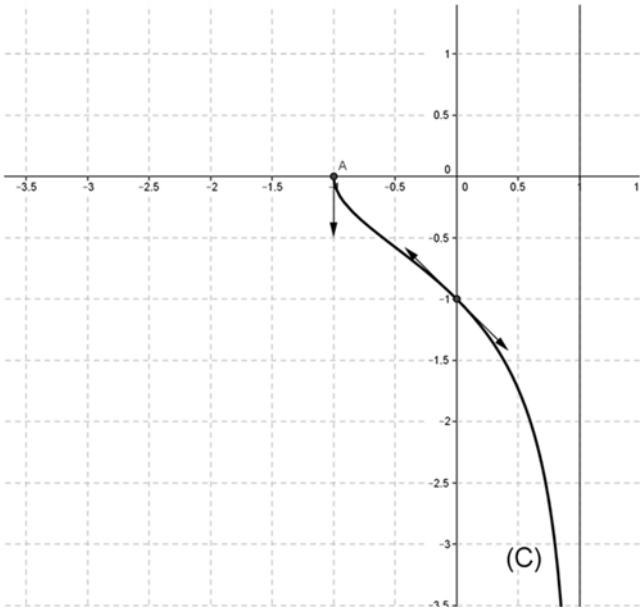
b) Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

3) On admet que f est définie sur] - ½ , ½] par : $f(x) = \frac{-2}{1 + \sin(\pi x)}$.

Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in]-\infty , -1[$.

EXERCICE N°2 : 40' 6 points

Sur la figure ci-contre, on donne (C) la représentation graphique d'une fonction h définie sur [-1 , 1[. T est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.



1) Par lecture graphique :

a) Déterminer h(0), h(-1), h'(0), $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{h(x) - h(-1)}{x + 1}$.

b) Dresser le tableau de variation de h et montrer que h réalise une bijection de [-1 , 1[sur un intervalle J a préciser.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h^{-1}(x)$, $\left(h^{-1}\right)'(-1)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h^{-1}(x) + 1}{x}$.

d) Tracer la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

2) Soit la fonction f définie sur [- π/2 , π/2[par $f(x) = h(\sin x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur]-π/2 , π/2[et que f est une bijection de [-π/2 , π/2[sur]-∞ , 0].

b) On admet que $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$, Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur]-∞ , 0] et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.